Очень полезная методичка, в которой мы разберём очень опасную ловушку, в которую попадаются на КР1.

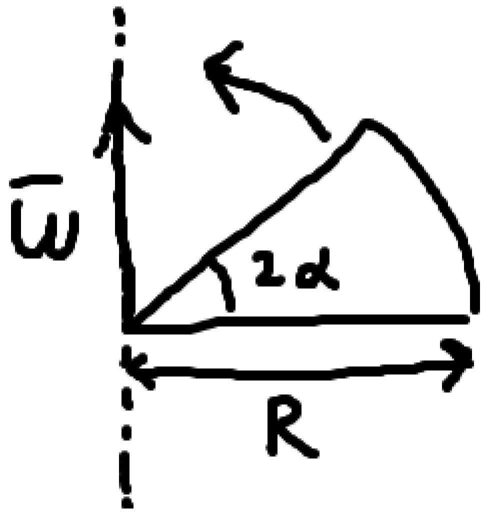
Заповедь:

```
Ища дипольный или квадрупольный момент покоящихся
объектов - избегай дельта-функций, даже если их
используют твои семинаристы, потому что без дельта-
функций выкладки будут в 100500 раз проще и короче.
Но если объект движется -
или
1) выполняй предельный переход
или
2) работай с дельта-функциями, расписывая их все в
```

Не поняли, о чём это я? Скоро поймёте. Решим задачу №1:

У нас сектор с поверхностной плотностью σ, радиусом R и углом раствора 2α. Он вращается вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости сектора с циклической частотой ω. Найти дипольный момент в любой момент времени.

Рисунок:



Записываем интеграл:

$$\bar{d} = \int\limits_{\text{по сектору}} \sigma \bar{r}\, dS$$

Первое правило клуба электрода:

ВЫЧИСЛИ ПРОЕКЦИЮ, А НЕ ВЕКТОР!

Вычислим проекцию на ось X. Заменим **r** на x, т.е. на r*cosφ.

$$d_x(\tau) = \int\limits_{\text{по сектору}} \sigma \cdot \overbrace{r\cos\varphi}^{x}\, dS$$

Интеграл удобно брать в полярной системе координат.

r меняется от 0 до R

φ меняется от ωτ-α до ωτ+α.

Якобиан перехода в полярные координаты – r.

$$d_x(\tau) = \iint\limits_{\substack{r\in[0..R]\\ \varphi\in[\omega\tau-\alpha..\alpha+\omega\tau]}} \sigma r\cos\varphi\cdot r\,dr\,d\varphi$$

Двойной интеграл распадается на произведение двух одиночных.

$$d_x(\tau) = \sigma \underbrace{\int_0^R z^2 dz}_{\frac{R^3}{3}} \underbrace{\int_{\omega\tau-\alpha}^{\omega\tau+\alpha} \cos\varphi \, d\varphi}_{\sin(\omega t+\alpha)-\sin(\omega t-\alpha) \; = \; 2\sin 2\alpha \cos\omega\tau}$$

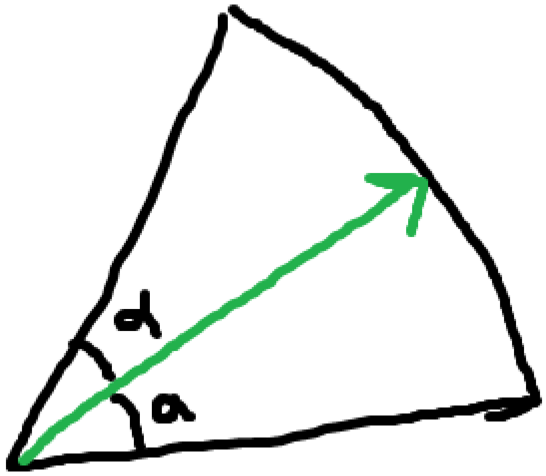
Перед тем, как записать ответ, давайте перейдём от поверхностной плотности заряда к суммарной. Это нам потребуется в дальнейшем.
$\sigma = q/S = q/(2\alpha R^2)$, поэтому ответ запишется как

$$d_x(\tau) = \frac{q}{2\alpha R^2} \cdot \frac{R^3}{3} \, 2\sin 2\alpha \cos\omega\tau = q \cdot \frac{R\sin 2\alpha}{3\alpha} \cdot \cos\omega\tau$$

Аналогично

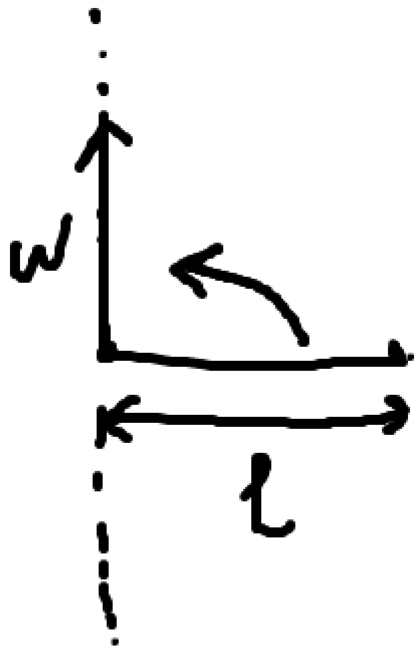
$$d_y(\tau) = q \cdot \frac{R\sin 2\alpha}{3\alpha} \cdot \sin\omega\tau$$

Если так представить, то **d** направлен вдоль центрального радиуса сектора



И вращается вместе с сектором, что полностью отвечает нашим представлениями о дипольном моменте как о своеобразном радиус-векторе в центр «масс заряда» системы.

А теперь решим новую задачу №2, казалось бы, более простую, но с подвохом.
Дан стержень длиной l и зарядом q. Его вращают вокруг вертикальной оси частотой ω:



Задание: найти дипольный момент времени в любой момент времени τ.

Сперва приведу правдоподобное, но НЕПРАВИЛЬНОЕ (!!!) решение:
Дипольный момент – это вектор в центр масс заряда. В случае равномерно заряженного стержня центр масс заряда – это середина стержня.

$$d = \frac{ql}{2}$$

Ну а затем он начинает вращаться вместе с стержнем:

$$d_x = \frac{ql}{2}\cos\omega\tau$$

$$d_y = \frac{ql}{2}\sin\omega\tau$$

В чём ошибка?

Я очень прошу раз и навсегда отказаться от соображения «подсчитать дипольный момент, как будто система покоится, а затем начать его вращать вместе с системой».
НО ПОЧЕМУ? ЭТО ЖЕ ТАК ПРОСТО, КРАСИВО И БЫСТРО!

Уф… Это очень тонкий момент. Он в моей серии методичек упоминается два раз: в методичке 6 (посвящённой потенциалам Лиенара-Вихерта) и в этой ☺
В методичке 6 он связан с тем, что там называется вторая поправка.
Автор, когда писал методичку 6, над второй поправкой думал… дня четыре, кажется. Советовался с умными людьми группы 215, которую он закончил, читал Фейнмана, методички НГУ и ещё что-то. Потом допёр и сейчас ему подвох в решении задачи №2 уже очевиден.
У вас же, наверное, будет наоборот: вы сейчас будете тупить, зато когда вы придёте к методичке 6, вторая поправка ***там*** вам будет очевидна. (Впрочем, вы можете повторить мой хронологический путь и начать с потенциалов Лиенара-Вихерта, а потом вернуться сюда).

Итак, почему же простое решение задачи №2 нужно отправить фтопку?

Обратимся к ответу задачи №1. Выполним там предельный переход α->0. Sin 2α заменится на 2α, и мы получим

$$d_x(\tau) = q\cdot\frac{R\cdot 2\cancel{\alpha}}{3\cancel{\alpha}}\cos\omega\tau = q\cdot\frac{2R}{3}\cos\omega\tau$$

$$d_y(\tau) = q\cdot\frac{R\cdot 2\cancel{\alpha}}{3\cancel{\alpha}}\sin\omega\tau = q\cdot\frac{2R}{3}\sin\omega\tau$$

Обратите внимание на геометрический коэффициент: 2R/3.
При α->0 наш сектор вырождается по сути в тот же стержень длиной R. Но только коэффициент… 2/3, а не ½, как было получено из неправильного решения задачи №2.

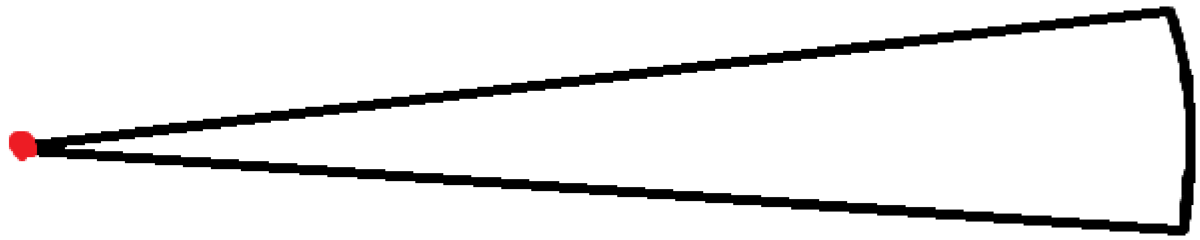
Вот это поворот. Уже напрягает.

Ладно, предельный переход – это не слишком физично. Тогда представим сектор с углом раствора 1 градус. Синус 2α уже будет не сильно отличаться от α, и с точностью то тысячных модуль дипольного момента будет с коэффициентом 2/3. Что далеко от ½. Аж на 1/6.
Но ведь это… почти стержень…

Итак, разгадка.
Стежни бывают двух видов:
Прямоугольный стержень – это вот такая полоска

Красная точка – точка крепления. Она неподвижна при вращении стержня.

Секторный стержень – это такой:



Для прямоугольного стержня его ширина много меньше длины, для секторного – угол раствора достаточно мал.

Так вот, стержень бесконечно малой толщины можно получить двумя способами: уменьшая ширину прямоугольного стержня или угол раствора секторного. Т.е. у нас два ***разных*** стержня бесконечно малой толщины. И дипольный момент у них будет разный.

Результат с коэффициентом 2/3 относится к секторному стержню!

Результат с коэффициентом ½, СКОРЕЕ ВСЕГО, относится к прямоугольному стержню. Но я не уверен. Чтобы понять, так ли это, нужно найти дипольный момент от прямоугольного стержня конечной ширины, а затем выполнить предельный переход, устремив ширину к нулю. Это сложно, мы этого делать не будем.

Вот для секторного стержня у нас ответ 100% верен, мы предельный переход выполнили.

Типичная задача от кафедры КТ и ФВЭ на самостоятельной: дан вращающий стержень, найдите его дипольный момент (и в дальнейшем излучение). Без указания, какой он: прямоугольный или секторный. Именно поэтому такая задача не очень корректна. Поэтому задач такого типа нет в задачниках лимонного цвета, которые всем раздаются. Зато они есть на контрольных. Очень некрасиво со стороны кафедры. Если она вам попадётся на контрольной – лимонным будет ваше лицо.

Итак, вам попалась задача, где какая-то хрень вращается вокруг оси.
Я всё-таки склоняюсь к той гипотезе, что кафедре КТ и ФВЭ нужен «секторный случай», когда ваша хрень у оси бесконечно тонкая. Почему? Потому что именно секторный случай мы получим, если будем работать с дельта-функциями, столь любимыми этой кафедрой. Итак, решение (уже верное) задачи №2, использующее дельта-функции:

Я уж буду обозначать длину стержня R, так будет удобнее.

Запишем поверхностную плотность заряда в круге радиусом R, используя дельта-функцию:

$$\sigma(r,\varphi) = K \cdot \delta(\varphi - \omega t)$$

Где K – некий коэффициент, пропорциональный заряду.
Найдём его, воспользовавшись тем, что суммарный заряд системы в любой момент q. Проинтегрируем поверхностную плотность по кругу:

$$q = \int\limits_{\text{по кругу}} \sigma \, dS = \int\limits_{\text{по кругу}} K \delta(\varphi - \omega t) \, dS$$

Вычислять мы его будем в полярных координатах. Не забываем якобиан перехода r.

$$q = \int\limits_{\text{по кругу}} \sigma\, dS = \int\limits_{\text{по кругу}} \kappa\, \delta(\varphi - \omega\tau)\, dS =$$

$$= \kappa \underbrace{\int_0^R r\, dr}_{= R^2/2.} \underbrace{\int_0^{2\pi} \delta(\varphi - \omega\tau)\, d\varphi}_{= 1}$$

Замечание. Мы считаем, что τ принадлежит [0..T], где T - период обращения, поэтому хоть один 0 у функции φ-ωτ на [0..2π] есть.

Откуда коэффициент к равен

$$K = \frac{2q}{R^2}$$

Он имеет размерность поверхностной плотности заряда, но ей не равен.

Итак, мы выполнили
Шаг 1: записать объёмную/поверхностную плотность заряда, как произведение дельта-функции (одной или нескольких) на постоянный коэффициент (традиционно он обозначается русской буквой «к»)
И затем выполнили
Шаг 2: нашли этот коэффициент путём приравнивания заряда q к интегралу объёмной/поверхностной плотности заряда по объёму/поверхности.

ЗАПРЕЩАЕТСЯ ИСКАТЬ КОЭФФИЦИЕНТ К КАКИМИ-ТО ДРУГИМИ СПОСОБАМИ!

Далее у нас

Шаг 3. Написать формулу для дипольного момента

$$\vec{d} = \int\limits_{\text{по кругу}} \sigma \vec{r}\, dS$$

Сразу перейдём к проекции, кроме того, подставим найденное нами выражение для поверхностной плотности:

$$d_x = \int\limits_{\text{по кругу}} k\delta(\varphi - \omega t)\, r\cos\varphi\, dS$$

И остался шаг 4 – проинтегрировать! Переходим в полярную систему координат. Не забываем про якобиан перехода.

$$d_x = \int\limits_{\text{по кругу}} k\delta(\varphi - \omega t)\, r\cos\varphi\, dS = k\underbrace{\int_0^R r^2 dr}_{=\frac{R^3}{3}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \delta(\varphi - \omega t)\cos\varphi\, d\varphi}_{=\int_{-\omega t}^{2\pi - \omega t} \delta(\mu)\cos(\mu + \omega t)\, d\mu \,=\, \cos\omega t}$$

Подставляем значение к, записываем ответ

$$d_x = \underset{\frac{2q}{R^2}}{k}\,\frac{R^3}{3}\cos\omega\tau = q\cdot\frac{2}{3}R\cos\omega\tau$$

Вот и знакомые нам 2/3.

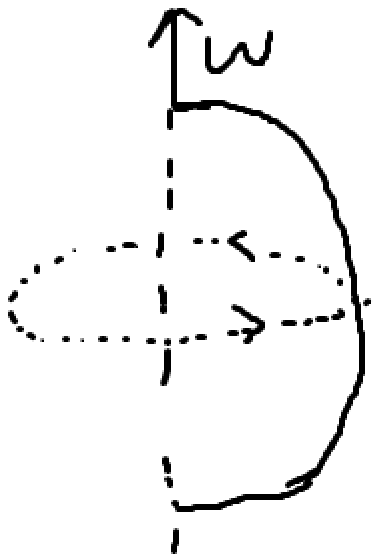
А d_y – то же самое, но с синусом.
Таким образом, дипольный момент действительно вращается синхронно со стержнем, но вот длину его нужно считать аккуратно.

Теперь вернёмся к заповеди, которая была в начале.
Ища дипольный или квадрупольный момент **покоящихся** объектов – **избегай дельта-функций**, даже если их используют твои семинаристы.
Но если объект **движется-крутится** –
или
1) выполняй предельный переход (найди дипольный момент **предельным переходом (именно им!)**, а потом «раскрути»)
или
2) работай с дельта-функциями, расписывая их все в любой момент времени!

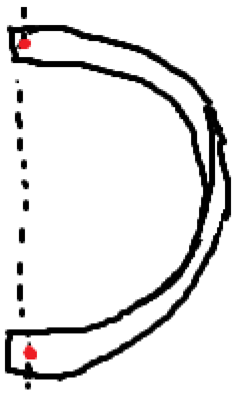
Мы уже в движущейся системе координат поработали однажды: перешли в неё, получили там ½, а затем сказали, что дипольный момент движется вместе со стержнем. Движется-то движется, но не с ½. В топку такой способ!

А вот и способ с предельным переходом (это когда мы рассмотрели сначала стержень, а потом устремили угол его раствора к нулю, получили 2/3, ***и лишь потом*** «раскрутили»), и способ с дельта-функциями дали нам верный результат.

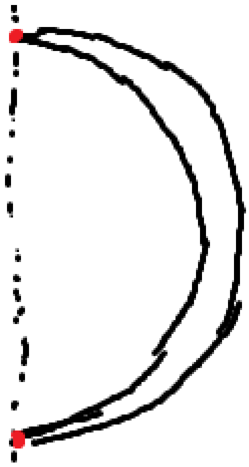
Решим ещё одну задачу. Вокруг оси вращается полукольцо:



Опять-таки, если подсчитать дипольный момент, считая кольцо неподвижным, а потом заставив его вращаться (не выполняя при этом предельный переход), мы получим неверный ответ.
Это, СКОРЕЕ ВСЕГО, будет соответствовать предельному переходу от такой вот согнутой прямоугольной полоски из бумаги



Но на самом деле нужно выполнять предельный переход от вот такой вот полоски



Можно решить задачу (уже верно), выполнив предельный переход от вот такой полоски. Но, как правило, решение задачи через дельта-функции оказывается более быстрым, поэтому мы предпочтём именно его.

Записываем на этот раз уже объёмную плотность:

$$\rho(\bar{r}) = k\,\delta(r-R)\,\delta(\varphi-\omega t)$$

Находим коэффициент к:

$$q = \int\limits_{\text{по } R^3} \rho(\bar{r})\,dV = \iiint\limits_{\substack{r\in[0..+\infty) \\ \theta\in[0..\pi] \\ \varphi\in[0..2\pi]}} k\,\delta(r-R)\,\delta(\varphi-\omega t)\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= k\underbrace{\int_0^\infty r^2\delta(r-R)}_{=R^2}\underbrace{\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta}_{=2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\delta(\varphi-\omega t)\,d\varphi}_{=1} = 2kR^2$$

И находим проекцию дипольного момента:

$$d_x = \int\limits_{\text{по } R^3} \rho(\bar{r})\overset{r\sin\theta\cos\varphi}{\overset{\parallel}{x}}\,dV = \iiint\limits_{\substack{r\in[0..+\infty) \\ \theta\in[0..\pi] \\ \varphi\in[0..2\pi]}} k\,\delta(r-R)\,\delta(\varphi-\omega t)\cdot r\sin\theta\cos\varphi\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= k\underbrace{\int_0^\infty r^3\delta(r-R)}_{=R^3}\underbrace{\int_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta}_{=\frac{\pi}{2}}\underbrace{\int_0^{2\pi}\delta(\varphi-\omega t)\cos\varphi\,d\varphi}_{=\cos\omega t} = \frac{\pi R^3\cdot \overset{\frac{q}{2R^2}}{k}}{2}\cos\omega t$$

$$= \frac{\pi R^3}{2}\cdot\frac{q}{2R^2}\cos\omega t = \frac{\pi q R}{4}\cos\omega t$$

Ну а d_y – то же самое с синусом.

И я ещё раз подчеркну

Если объект объёмный, то мы можем подсчитать дипольный момент, как будто объект покоится, а затем «раскрутить» его с фигурой.

Объёмные фигуры – это те, у которых ненулевой объём. Шар, половина шара, четверть шара, осьмушка шара, параллепипед…

Необъёмные – это сферы, части сферы, кривые линии и т.д.
ТОЛЬКО для объёмных фигур мы вправе подсчитать дипольный момент, как будто объект покоится, а затем «раскрутить» его с фигурой без всякого предельного перехода.
Пример. Найти дипольный момент половины шара радиусом R. Для удобства направим ось z перпендикулярно плоскости, которая поделила шар на две половины. Тогда дипольный момент будет иметь в силу симметрии только зетовую компоненту и будет она равна

$$d_z = \rho \iiint r\cos\theta \cdot r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

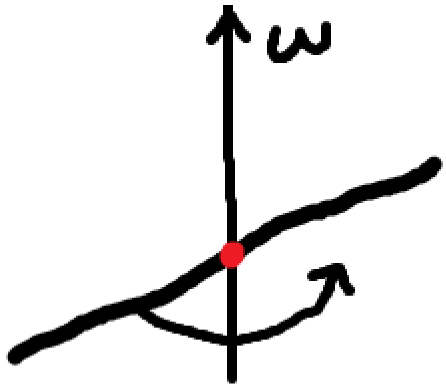
$$r \in [0..R]$$
$$\varphi \in [0..2\pi]$$
$$\theta \in [0..\tfrac{\pi}{2}]$$

Давайте себе представим этот вектор. Он выходит из центра шара, идёт перпендикулярно плоскости, которая поделила шар пополам, и идёт в сторону половины шара, где у нас заряд.
Далее вокруг какой оси бы мы не крутили наше полушарие (лишь бы ось проходила через центр) – дипольный момент будет вращаться с этим полушарием так, что его относительное положение относительно полушария меняться не будет. Он своего рода указатель на центр масс.

Вообще объёмные объекты довольно приятные. Помимо того, что мы можем сначала подсчитать дипольный момент в СК, привязанной к объекту, а затем раскрутить его вместе с объектом, для трёхмерных объектов для них не надо считать противный коэффициент K, для которого нам трудно придумать физический смысл, надо лишь подсчитать объёмную плотность, что очень легко, да и физический смысл у неё есть.

А вот объекты без объёма требуют аккуратной работы или через предельный переход от «объёмных» фигур, или через дельта-функции. Это не проблема дипольного момента, это скорее проблема самих фигур: они не слишком физичны. Так что точно такие же меры предосторожности нужно применять и при подсчёте их магнитопольного, квадрупольного моментов и т.д.

Ещё одна задача, которую я встречал. Взяли стержень длиной 2*l* и раскрутили относительно его центра.



Ну и тут может возникнуть затык, как искать K.

Способ намбер ванн:

$$q = K \int_{-\infty}^{\infty} \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{\delta(z)} \cdot \int_{0}^{+\infty} \underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{\left[\delta(\varphi - \omega \tau) + \delta(\varphi + \pi - \omega \tau)\right]} \cdot \int_{0}^{l} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{якобиан}}}{r}\, dr$$

Т.е. записать сумму дельта-функций (в данном случае двух – для каждой из половин стержня).

Способ намбер ту:

Поделить на стержень на два с зарядом q/2.

Записать объёмную плотность для одного

Записать объёмную плотность для другого

Сложить их

PROFIT :)

Сами дорешаете задачу